系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(9) (2010, 9), 1275–1282

基于可能度的一种直觉模糊集相似度测量方法*

魏 翠 萍
(曲阜师范大学运筹与管理学院，日照 276826)
唐 锡 晋
(中国科学院数学与系统科学研究院，北京 100190)

摘要 研究直觉模糊集的相似度测量方法. 首先给出两个直觉模糊数比较的可能度公式及其性质. 在此基础上，定义两个直觉模糊集间的相似度测量公式，分析用此公式进行相似度测量的优缺点，旨为直觉模糊集在决策、模式识别和医疗诊断中的应用提供更为合理的工具.

关键词 直觉模糊集，可能度公式，相似度测量.

MR(2000) 主题分类号 90B50

1 引 言

Atanassov[1] 于 1986 年提出的直觉模糊集是 Zadeh[2] 模糊集的一种推广形式. Bustince 和 Burillo[3] 指出 Gau 和 Buehrer 提出的 Vague 集 [4] 等同于直觉模糊集. 由于直觉模糊集同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度三个方面信息，因此直觉模糊集在处理模糊性和不确定性信息时比传统的模糊集有更强的表达力和灵活性，已在决策领域 [5−10] 、医疗诊断 [11] 和模式识别 [12,13] 等方面得到广泛地应用.

论域 X 上的直觉模糊集可看作是直觉模糊数的集合 [6]. 在多属性决策中，当方案满足与不满足决策准则的综合评价值以直觉模糊数表示时，对方案的比较就归结为对直觉模糊数的比较. 目前关于直觉模糊数比较主要以评分函数为依据. Chen 和 Tan[8] 定义了得分函数， Hong 和 Choi[9] 分析了得分函数的不足，追加了精确函数. 其后李凡 [10], 刘华文 [5] 等给出了一系列得分函数的修改形式. 本文总称为评分函数. 采用这些评分函数对直觉模糊数进行比较时，最优方案的选择会由于决策者选择评分函数的不同而得到不同的结果，而评分函数的选择要由专家主观偏好而定. 由于直觉模糊数本身具有一定的模糊性，因此对它们进行比较时，如何把这种模糊性客观地反映出来是很有意义的.

* 国家重点基础研究发展计划项目 (2010CB731405) 和山东省高等学校科技计划项目 (J09LA14) 资助课题.
收稿日期：2009-09-01.

直觉模糊集的相似度测量已在各种智能系统，模式识别中得到了广泛地应用．目前，关于直觉模糊集的相似度测量公式已有许多 [12–20]，文 [16, 17] 对这些方法进行了比较和总结，分析了现有方法的优缺点．对直觉模糊集间的相似度测量，现有的方法都存在一定的不足，主要体现在相似度测量公式无法区分两个直觉模糊集的隶属度间和非隶属度间的正负偏差，导致对某些直觉模糊集分辨能力较差，相似度测量结果与直觉不符，因此有必要探讨新的相似度测量公式．

本文把区间数比较的可能度公式 [21,22] 引入直觉模糊数，定义了直觉模糊数比较的可能度公式；比较任意两个直觉模糊数，采用可能度公式与采用 Chen 和 Tan 定义的得分函数 [8] 所得到的排序结果相同，但前者可同时给出直觉模糊数比较的优劣程度，为决策者提供更多的决策信息．利用可能度公式，本文定义了直觉模糊集的相似度测量公式，该公式对隶属度间偏差的绝对值与非隶属度间偏差的绝对值之和相等的直觉模糊集有更强的分辨力，可弥补原有公式的不足．

2 基本概念

定义 2.1[1] 设 X 是一个给定论域，称 $A=\{\langle x,u_A(x),v_A(x)\rangle|x\in X\}$ 为 X 上的直觉模糊集，记为 IFS，其中 $u_A:X\to[0,1]$，$v_A:X\to[0,1]$ 且满足条件 $0\le u_A(x)+v_A(x)\le 1$，$x\in X$，$u_A(x)$ 和 $v_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度．

X 上所有 IFS 记为 IFS(X)．$\pi_A(x)=1-u_A(x)-v_A(x)$ 表示 x 属于 A 的犹豫度，Szmidt 和 Kacprzyk[23] 称 $\pi_A(x)$ 为 X 中元素 x 属于 A 的直觉指标．特别地，若 $\pi_A(x)=0$，则 A 退化为传统的模糊集．

定义 2.2[1] 设 $A,B\in$ IFS(X)，作如下定义

1) $A\subset B\Leftrightarrow u_A(x)\le u_B(x)$ 并且 $v_A(x)\ge v_B(x)$，$\forall\, x\in X$；

2) $A=B\Leftrightarrow A\subset B$ 并且 $B\subset A$；

3) $\overline{A}=\{\langle x,v_A(x),u_A(x)\rangle|x\in X\}$；

4) $A\cup B=\{\langle x,\max\{u_A(x),v_A(x)\},\min\{u_A(x),v_A(x)\}\rangle|x\in X\}$；

5) $A\cap B=\{\langle x,\min\{u_A(x),v_A(x)\},\max\{u_A(x),v_A(x)\}\rangle|x\in X\}$．

X 中 x 属于 A 的隶属度与非隶属度所组成的有序对 $(u_A(x),v_A(x))$ 称为直觉模糊数 [6,7]．因此，可以将 X 上的直觉模糊集 A 看作是直觉模糊数的集合，即可记 $A=\{\big(u_A(x),v_A(x)\big)|x\in X\}$．为方便起见，直觉模糊数的一般形式记为 (a,b)，其中 $a\in[0,1],b\in[0,1],0\le a+b\le 1$．全体直觉模糊数的集合记为 Q．

3 直觉模糊数比较的可能度公式

实际问题中常常需要专家对备选方案进行排序或择优．设专家对某一方案满意与不满意程度的综合评价值用直觉模糊数 $\alpha=(a,b)$ 表示，则其犹豫度 $\pi(\alpha)=1-a-b$．$\pi(\alpha)$ 越大，说明专家对该方案的满意程度与不满意程度的可能变化范围越大．事实上，当综合评价值为 (a,b) 时，专家对该方案的满意度的可能取值为区间数 $[a,a+\pi(\alpha)]$，相应的不满意度的可能取值为 $[b,b+\pi(\alpha)]$．因此，当专家对方案的综合评价值为直觉模糊数时，对直觉模糊数的比较可由文 [21,22] 中关于区间数比较的可能度公式获得．

定义 3.1 设 $\alpha_1=(a_1,b_1)$，$\alpha_2=(a_2,b_2)$ 为两个直觉模糊数，$\pi(\alpha_1)=1-a_1-b_1$，$\pi(\alpha_2)=$

$1-a_2-b_2$. 当 $\pi(\alpha_1)=\pi(\alpha_2)=0$ 时，称

$$p(\alpha_1>\alpha_2)=\begin{cases}1, & a_1>a_2,\\ 0, & a_1<a_2,\\ \dfrac{1}{2}, & a_1=a_2\end{cases}$$

为 $\alpha_1>\alpha_2$ 的可能度.

定义 3.2　设 $\alpha_1=(a_1,b_1)$, $\alpha_2=(a_2,b_2)$ 为两个直觉模糊数，$\pi(\alpha_1)=1-a_1-b_1$, $\pi(\alpha_2)=1-a_2-b_2$. 当 $\pi(\alpha_1),\pi(\alpha_2)$ 不全为 0 时，称

$$p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{\max\{0,(a_1+\pi(\alpha_1))-a_2\}-\max\{0,a_1-(a_2+\pi(\alpha_2))\}}{\pi(\alpha_1)+\pi(\alpha_2)}$$

为 $\alpha_1>\alpha_2$ 的可能度.

定义 3.3　若 $p(\alpha_1>\alpha_2)>p(\alpha_2>\alpha_1)$, 则称 α_1 以 $p(\alpha_1>\alpha_2)$ 的可能度优于 α_2, 记为 $\alpha_1 \overset{p(\alpha_1>\alpha_2)}{\succ} \alpha_2$;

若 $p(\alpha_1>\alpha_2)=p(\alpha_2>\alpha_1)=0.5$, 则称 α_1 无差异于 α_2, 记作 $\alpha_1\sim\alpha_2$;

若 $p(\alpha_2>\alpha_1)>p(\alpha_1>\alpha_2)$, 则称 α_1 以 $p(\alpha_2>\alpha_1)$ 的可能度劣于 α_2, 记为 $\alpha_1 \overset{p(\alpha_2>\alpha_1)}{\prec} \alpha_2$.

由区间数比较的可能度公式满足的性质 [21,22], 容易证明

定理 3.1　设 $\alpha_1=(a_1,b_1)$, $\alpha_2=(a_2,b_2)$, $\alpha_3=(a_3,b_3)$ 为 3 个直觉模糊数，则

1)　$0\le p(\alpha_1>\alpha_2)\le 1$;

2)　$p(\alpha_1>\alpha_2)=1\Leftrightarrow a_1\ge a_2+\pi(\alpha_2)$;

3)　$p(\alpha_1>\alpha_2)=0\Leftrightarrow a_2\ge a_1+\pi(\alpha_1)$;

4)　(互补性)　$p(\alpha_1>\alpha_2)+p(\alpha_2>\alpha_1)=1$, 特别地，当 $\alpha_1=\alpha_2$ 时，$p(\alpha_1>\alpha_2)=p(\alpha_2>\alpha_1)=\frac{1}{2}$;

5)　设 $a_1\le a_2, b_1\le b_2$. 则 $p(\alpha_1>\alpha_2)\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow a_1-b_1\ge a_2-b_2$; 进一步地，$p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a_1-b_1=a_2-b_2$;

6)　(序传递性)　对于 $\alpha_1=(a_1,b_1)$, $\alpha_2=(a_2,b_2)$, $\alpha_3=(a_3,b_3)$, 若 $p(\alpha_1>\alpha_2)>\frac{1}{2}$ 且 $p(\alpha_2>\alpha_3)\ge\frac{1}{2}$ 或 $p(\alpha_1>\alpha_2)\ge\frac{1}{2}$ 且 $p(\alpha_2>\alpha_3)>\frac{1}{2}$, 则 $p(\alpha_1>\alpha_3)>\frac{1}{2}$; 若 $p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{1}{2}$ 且 $p(\alpha_2>\alpha_3)=\frac{1}{2}$, 则 $p(\alpha_1>\alpha_3)=\frac{1}{2}$.

对直觉模糊数 $\alpha=(a,b)$, 利用 Chen 和 Tan 定义的得分函数 [8] 可计算 α 的得分函数值 $S(\alpha)=a-b$. 对任意两个直觉模糊数，得分函数值越大，则相应的直觉模糊数越优. 下面定理给出了用得分函数和用可能度公式比较两个直觉模糊数的关系。

定理 3.2　对任意两个直觉模糊数 $\alpha_1=(a_1,b_1)$ 和 $\alpha_2=(a_2,b_2)$, $p(\alpha_1>\alpha_2)\ge\frac{1}{2}$ 当且仅当 $S(\alpha_1)\ge S(\alpha_2)$; 进一步地，$p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{1}{2}$ 当且仅当 $S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$.

证　充分性　由 $S(\alpha_1)\ge S(\alpha_2)$, 可得 $a_1-b_1\ge a_2-b_2$, 因此 $(a_1+\pi(\alpha_1))-a_2\ge(a_2+\pi(\alpha_2))-a_1$. 若 $(a_2+\pi(\alpha_2))-a_1\le 0$, 则由定理 3.1 中的 2) 可得 $p(\alpha_1>\alpha_2)=1$; 若 $(a_2+\pi(\alpha_2))-a_1>0$, 则 $(a_1+\pi(\alpha_1))-a_2>0$, 因此,

$$p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{(a_1+\pi(\alpha_1))-a_2}{\pi(\alpha_1)+\pi(\alpha_2)}=\frac{(a_1+\pi(\alpha_1))-a_2}{a_1+\pi(\alpha_1)-a_2+(a_2+\pi(\alpha_2)-a_1)}\ge\frac{1}{2}.$$

若 $S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$, 则 $a_1-b_1=a_2-b_2$. 不妨设 $a_1\le a_2$, 则有 $b_1\le b_2$, 又由定理 3.1 中的 5) 可得 $p(\alpha_1>\alpha_2)=\frac{1}{2}$.

必要性 由 $p(\alpha_1 > \alpha_2) \geq \frac{1}{2}$, 得 $p(\alpha_1 > \alpha_2) \neq 0$, 又由定理 3.1 中的 3) 可得 $a_2 < a_1+\pi(\alpha_1)$.

若 $a_1 > a_2+\pi(\alpha_2)$, 则有 $a_1-a_2 > a_2+\pi(\alpha_2)-(a_1+\pi(\alpha_1)) = b_1-b_2$. 因此，$a_1-b_1 > a_2-b_2$, $S(\alpha_1) > S(\alpha_2)$; 若 $a_1 \leq a_2+\pi(\alpha_2)$, 则 $p(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{a_1+\pi(\alpha_1)-a_2}{\pi(\alpha_1)+\pi(\alpha_2)}$, 又由 $p(\alpha_1 > \alpha_2) \geq \frac{1}{2}$, 可得 $\frac{1-b_1-a_2}{1-a_1-b_1+1-a_2-b_2} \geq \frac{1}{2}$, 因此， $a_1-b_1 \geq a_2-b_2$, $S(\alpha_1) \geq S(\alpha_2)$. 综上所述，由 $p(\alpha_1 > \alpha_2) \geq \frac{1}{2}$ 可得 $S(\alpha_1) \geq S(\alpha_2)$.

设 $p(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{1}{2}$. 若 $\pi(\alpha_1) \neq 0$,$\pi(\alpha_2) \neq 0$, 则有 $a_2 < a_1+\pi(\alpha_1)$ 和 $a_1 < a_2+\pi(\alpha_2)$, 因此 $p(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{a_1+\pi(\alpha_1)-a_2}{\pi(\alpha_1)+\pi(\alpha_2)} = \frac{1-b_1-a_2}{1-a_1-b_1+1-a_2-b_2} = \frac{1}{2}$. 由此可得， $a_1-b_1 = a_2-b_2$, $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$. 同理可证,当 $\pi(\alpha_1) \neq 0, \pi(\alpha_2) = 0$ 或 $\pi(\alpha_1) = 0, \pi(\alpha_2) \neq 0$ 时，$S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$. 当 $\pi(\alpha_1) = \pi(\alpha_2) = 0$ 时， $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, 从而 $S(\alpha_1) = S(\alpha_2) = 0$. 综上所述，由 $p(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{1}{2}$ 可得 $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$.

由定理 3.2 可得，对任意两个直觉模糊数 α_1, α_2 进行比较，由可能度公式和由 Chen 和 Tan[8] 的得分函数得到的排序结果相同，不妨设为 $\alpha_1 \succ \alpha_2$. 但由可能度公式得到的结果不仅给出了 α_1, α_2 的优劣关系，而且给出 $\alpha_1 \succ \alpha_2$ 的可能度为 $p(\alpha_1 > \alpha_2)$, 反映了直觉模糊数本身具有一定模糊性的特点，为决策者提供了更多的决策信息. 第 4 节利用直觉模糊数比较的可能度公式定义直觉模糊集的相似度测量.

4 直觉模糊集的一种相似度测量方法

设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是有限点 (对象) 集. 对任意两个直觉模糊集 $A_i = \{A_i(x_k)|x_k \in X\} = \{(u_{A_i}(x_k), v_{A_i}(x_k))|x_k \in X\}$, $i = 1, 2$, Li 和 Cheng[13] 给出了有关直觉模糊集 A_1, A_2 的相似性测度的概念

定义 4.1[13,16] 设 $M : \mathrm{IFS}(X) \times \mathrm{IFS}(X) \to [0, 1]$ 为一个映射， $A_i \in \mathrm{IFS}(X)(i = 1, 2, 3)$, 则称 $M(A_1, A_2)$ 为 A_1 和 A_2 的相似度，若它满足条件

S1 $M(A_1, A_2) \in [0, 1]$;

S2 $M(A_1, A_2) = M(A_2, A_1)$;

S3 若 $A_1 = A_2$, 则 $M(A_1, A_2) = 1$;

S4 若 $A_1 \subset A_2 \subset A_3$, 则 $M(A_1, A_3) \leq M(A_2, A_3)$, $M(A_1, A_3) \leq M(A_1, A_2)$.

注 定义 4.1 中的条件 S3 仅考虑了充分性条件， Mitchell[12] 把此条件改进为

S3′ $M(A_1, A_2) = 1 \Leftrightarrow A_1 = A_2$. Li 和 David[17] 等把 Chen[14], Hong 和 Kin[18] 在 Vague 集的相似度测量中的条件增加到定义 4.1.

S5 $M(A_1, A_2) = 0 \Leftrightarrow \forall x_k \in X, A_1(x_k) = (0, 1), A_2(x_k) = (1, 0)$; 或 $A_2(x_k) = (0, 1)$, $A_1(x_k) = (1, 0)$.

现有的直觉模糊集相似度测量公式主要存在的缺陷是：对某些直觉模糊集分辩能力较差，从而使相似度测量结果违背人们的直观认识. 例如， Chen[14] 给出的计算两个直觉模糊集的相似度公式为

$$M_C(A_1, A_2) = 1 - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |S(A_1(x_k)) - S(A_2(x_k))|}{2n},$$

其中 $S(A_i(x_k)) = u_{A_i}(x_k) - v_{A_i}(x_k), i = 1, 2$. 此公式不满足条件 $S3'$ 的必要性. 事实上, 对满足 $S(A_1(x_k)) = S(A_2(x_k)), 1 \leq k \leq n$, 的任意两个直觉模糊集 A_1 和 A_2, 均有 $M_C(A_1, A_2) = 1$. 这样，当 $A_1 = \{(0.3, 0.4)\}, A_2 = \{(0.4, 0.5)\}$ 时， $M_C(A_1, A_2) = 1$, 这显然与直觉不符.

Hong 和 Kim[18] 指出了 $M_C(A_1,A_2)$ 的缺陷，并给出下面的相似度计算公式

$$M_H(A_1,A_2)=1-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|u_{A_1}(x_k)-u_{A_2}(x_k)|+|v_{A_1}(x_k)-v_{A_2}(x_k)|}{2n}.$$

在公式 $M_H(A_1,A_2)$ 中, 不能区分 $u_{A_1}(x_k)$ 与 $u_{A_2}(x_k)$, $v_{A_1}(x_k)$ 与 $v_{A_2}(x_k)$ 的正负偏差, 并且对满足 $|u_{A_1}(x_k)-u_{A_2}(x_k)|+|v_{A_1}(x_k)-v_{A_2}(x_k)|=|u_{A_1}(x_k)-u_{A_3}(x_k)|+|v_{A_1}(x_k)-v_{A_3}(x_k)|$ 的任意直觉模糊集 A_1,A_2,A_3, 均有 $M_H(A_1,A_2)=M_H(A_1,A_3)$. 例如，当 $A_1=\{(0.3,0.5)\},A_2=\{(0.3,0.2)\},A_3=\{(0.4,0.3)\}$ 时，由于 $|0.3-0.3|+|0.5-0.2|=|0.3-0.4|+|0.5-0.3|$, 因此 $M_H(A_1,A_2)=M_H(A_1,A_3)$. 文 [12, 20] 提出的相似度测量公式也都存在这样的缺陷. 下面我们利用直觉模糊数比较的可能度公式，定义直觉模糊集的相似度测量公式. 该公式在一定程度上可以弥补 $M_C(A_1,A_2)$, $M_H(A_1,A_2)$ 等公式的不足.

设 α_1,α_2 为两个直觉模糊数，$P(\alpha_1>\alpha_2)$ 为 $\alpha_1>\alpha_2$ 的可能度. $S(\alpha)$ 为 Chen 和 Tan[8] 定义的得分函数. 定义函数

$$M_1(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{cases}1-|2P(\alpha_1>\alpha_2)-1|, & S(\alpha_1)\neq S(\alpha_2),\\ 1-|2P(\widetilde{\alpha_1}>\widetilde{\alpha_2})-1|, & S(\alpha_1)=S(\alpha_2),\end{cases}\qquad(1)$$

其中 $\widetilde{\alpha_1}=(a_1,\frac{a_1+1-b_1}{2}),\widetilde{\alpha_2}=(a_2,\frac{a_2+1-b_2}{2})$.

设 $A_i=\{A_i(x_k)|x_k\in X\}=\{(u_{A_i}(x_k),v_{A_i}(x_k))|x_k\in X\}\ (i=1,2)$, 为两个直觉模糊集，定义函数

$$M_2(A_1,A_2)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_1(A_1(x_k),A_2(x_k)).\qquad(2)$$

下面将证明 $M_2(A_1,\ A_2)$ 满足定义 4.1 中的条件.

引理 4.1　对任意两个直觉模糊数 $\alpha_1=(a_1,b_1)$ 和 $\alpha_2=(a_2,b_2)$, $M_1(\alpha_1,\alpha_2)$ 满足下面的性质

1)　$M_1(\alpha_1,\alpha_2)\in[0,1]$;

2)　$M_1(\alpha_1,\alpha_2)=M_1(\alpha_2,\alpha_1)$;

3)　$M_1(\alpha_1,\alpha_2)=1\Leftrightarrow a_1=a_2,b_1=b_2$;

4)　$\forall\alpha_3\in Q$, 若 $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3$, 则 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)\geq M_1(\alpha_1,\alpha_3)$, $M_1(\alpha_3,\alpha_2)\geq M_1(\alpha_3,\alpha_1)$;

5)　若 $a_1>1-b_2$ 或 $a_2>1-b_1$, 则 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=0$. 特别地，若 $\alpha_1=(0,1),\alpha_2=(1,0)$ 或 $\alpha_2=(0,1),\alpha_1=(1,0)$, 则 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=0$.

证　1) 由定理 3.1 中 1): $\forall\alpha_1=(a_1,b_1),\alpha_2=(a_1,b_1)$, $0\leq P(\alpha_1>\alpha_2)\leq 1$, 和定义 4.1 中公式 (1), 可得 $0\leq M_1(\alpha_1,\alpha_2)\leq 1$.

2) 由定理 3.1 中 2): $\forall\alpha_1=(a_1,b_1)$, $\alpha_2=(a_1,b_1)$, $P(\alpha_1>\alpha_2)+P(\alpha_2>\alpha_1)=1$ 和定义 4.1 中公式 (1), 易得 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=M_1(\alpha_2,\alpha_1)$.

3) 充分性　若 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, 则 $S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$, $\widetilde{\alpha_1}=\widetilde{\alpha_2}$. 因此，$P(\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2})=0.5$, $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=1$.

必要性　若 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=1$, 则 $S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$ (事实上，若 $S(\alpha_1)\neq S(\alpha_2)$, 不妨设 $S(\alpha_1)>S(\alpha_2)$, 则由定理 3.2 可得，$P(\alpha_1>\alpha_2)>0.5$. 因此，$M_1(\alpha_1,\alpha_2)<1$). 由 $S(\alpha_1)=S(\alpha_2)$ 和 $M_1(\alpha_1,\alpha_2)=1$, 可得 $P(\widetilde{\alpha_1}>\widetilde{\alpha_2})=0.5$, 因此，$a_1-\frac{a_1+1-b_1}{2}=a_2-\frac{a_2+1-b_2}{2}$, 又由 $a_1-b_1=a_2-b_2$, 可以得 $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

4) 由 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$, 可得 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, 从而, $S(\alpha_1) \geq S(\alpha_2) \geq S(\alpha_3)$. 并且可以证明 $S(\alpha_1) = S(\alpha_2) = S(\alpha_3)$ 当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$, $b_1 = b_2 = b_3$. 因此，当 $S(\alpha_1) = S(\alpha_2)$, $S(\alpha_1) = S(\alpha_3)$ 时，$P(\widetilde{\alpha_1} > \widetilde{\alpha_2}) = P(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{1}{2}$, $P(\widetilde{\alpha_1} > \widetilde{\alpha_3}) = P(\alpha_1 > \alpha_3) = \frac{1}{2}$. 此时，$M_1(\alpha_1,\alpha_2) = 1 - |2P(\alpha_1 > \alpha_2) - 1|$, $M_1(\alpha_1,\alpha_3) = 1 - |2P(\alpha_1 > \alpha_3) - 1|$. 又由 $S(\alpha_1) \geq S(\alpha_2) \geq S(\alpha_3)$ 及定理 3.2, 得 $P(\alpha_1 > \alpha_2) \geq \frac{1}{2}$, $P(\alpha_1 > \alpha_3) \geq \frac{1}{2}$. 因此，$M_1(\alpha_1,\alpha_2) = 2 - 2P(\alpha_1 > \alpha_2)$, $M_1(\alpha_1,\alpha_3) = 2 - 2P(\alpha_1 > \alpha_3)$.

若 $a_1 \geq a_2 + \pi(\alpha_2)$, 则由 $b_2 \leq b_3$, 可得 $a_1 \geq a_3 + \pi(\alpha_3)$. 因此 $P(\alpha_1 > \alpha_2) = P(\alpha_1 > \alpha_3) = 1$, $M_1(\alpha_1,\alpha_3) = M_1(\alpha_1,\alpha_2) = 0$; 若 $a_1 < a_2 + \pi(\alpha_2)$, 则有

$$P(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{a_1 + \pi(\alpha_1) - a_2}{(1 - b_1 - a_1) + (1 - b_2 - a_2)} = \frac{1 - b_1 - a_2}{(1 - b_1 - a_1) + (1 - b_2 - a_2)}.$$

若 $a_1 \geq a_3 + \pi(\alpha_3)$, 则 $P(\alpha_1 > \alpha_3) = 1$, $M_1(\alpha_1,\alpha_3) = 0 \leq M_1(\alpha_1,\alpha_2)$; 若 $a_1 < a_3 + \pi(\alpha_3)$, 则由 $a_1 + \pi(\alpha_1) \geq a_3 + \pi(\alpha_3) \geq a_3$ 及 $1 - b_3 \leq 1 - b_2$, 可得

$$P(\alpha_1 > \alpha_3) = \frac{a_1 + \pi(\alpha_1) - a_3}{(1 - b_1 - a_1) + (1 - b_3 - a_3)} \geq \frac{1 - b_1 - a_3}{(1 - b_1 - a_1) + (1 - b_2 - a_3)}.$$

令 $t = 1 - b_1$, $l = 1 - b_1 - a_1 + 1 - b_2$. 由 $a_1 < a_2 + \pi(\alpha_2)$ 可得，$1 - a_1 - b_2 > 0$, 从而 $1 - b_1 + 1 - a_1 - b_2 > 1 - b_1$, 即 $l > t > 0$. 这样，$P(\alpha_1 > \alpha_3) \geq \frac{t-a_3}{l-a_3}$, $P(\alpha_1 > \alpha_2) = \frac{t-a_2}{l-a_2}$.

令 $f(x) = \frac{t-x}{l-x}$. 由 $f'(x) = \frac{t-l}{(l-x)^2} < 0$, 可得 $f(x)$ 是严格单调递减函数. 因此，由 $a_2 \geq a_3$, 可得 $\frac{t-a_3}{l-a_3} \geq \frac{t-a_2}{l-a_2}$, 所以有 $P(\alpha_1 > \alpha_3) \geq P(\alpha_1 > \alpha_2)$, $M_1(\alpha_1,\alpha_2) \geq M_1(\alpha_1,\alpha_3)$.

同理可证，$M_1(\alpha_3,\alpha_2) \geq M_1(\alpha_3,\alpha_1)$.

5) 若 $a_1 \geq 1 - b_2$, 则 $P(\alpha_1 > \alpha_2) = 1$, 由公式 (1), $M_1(\alpha_1,\alpha_2) = 0$; 若 $a_2 \geq 1 - b_1$, 则 $P(\alpha_1 > \alpha_2) = 0$, 因此 $M_1(\alpha_1,\alpha_2) = 0$. 显然，当 $\alpha_1 = (0,1), \alpha_2 = (1,0)$ 或 $\alpha_2 = (0,1), \alpha_1 = (1,0)$ 时，有 $M(\alpha_1,\alpha_2) = 0$.

由引理 4.1, 容易证明

定理 4.1 $\forall A_i = \{A_i(x_k)|x_k \in X\} = \{(u_{A_i}(x_k), v_{A_i}(x_k))|x_k \in X\} \in \mathrm{IFS}(X)$, $i = 1,2,3$, $M_2(A_1,A_2)$ 满足

1) $M_2(A_1,A_2) \in [0,1]$;
2) $M_2(A_1,A_2) = M_2(A_2,A_1)$;
3) $M_2(A_1,A_2) = 1 \Leftrightarrow A_1 = A_2$;
4) 若 $A_1 \subset A_2 \subset A_3$, 则 $M_2(A_1,A_3) \leq M_2(A_2,A_3)$, $M_2(A_1,A_3) \leq M_2(A_1,A_2)$;
5) 若 $\forall x_k \in X$, $u_{A_1}(x_k) > 1 - v_{A_2}(x_k)$ 或 $u_{A_2}(x_k) > 1 - v_{A_1}(x_k)$, 则 $M_2(A_1,A_2) = 0$. 特别地，若 $\forall x_k \in X$, $A_1(x_k) = (0,1), A_2(x_k) = (1,0)$; 或者 $A_2(x_k) = (0,1), A_1(x_k) = (1,0)$, 则 $M_2(A_1,A_2) = 0$.

由定理 4.1 可知，$M_2(A_1,A_2)$ 满足 Mitchell[12] 给出的直觉模糊集的相似度定义. 对上面的例子，当 $A_1 = \{(0.3,0.4)\}, A_2 = \{(0.4,0.5)\}$ 时，$M_2(A_1,A_2) = 0.5$, 而 $M_C(A_1,A_2) = 1$; 当 $A_1 = \{(0.3,0.5)\}, A_2 = \{(0.3,0.2)\}, A_3 = \{(0.4,0.3)\}$ 时，$M_2(A_1,A_2) = 0.57$, $M_2(A_1,A_3) = 0.40$. 此结果不同于 $M_H(A_1,A_2) = M_H(A_1,A_3)$. 事实上，对满足

$$S(A_1(x_k)) = S(A_2(x_k))$$

或

$$\begin{aligned}&|u_{A_1}(x_k) - u_{A_2}(x_k)| + |v_{A_1}(x_k) - v_{A_2}(x_k)|\\ = &|u_{A_1}(x_k) - u_{A_3}(x_k)| + |v_{A_1}(x_k) - v_{A_3}(x_k)|, \quad 1 \leq k \leq n\end{aligned}$$

的直觉模糊集，公式 $M_2(A_1, A_2)$ 比公式 $M_C(A_1, A_2)$ 和 $M_H(A_1, A_2)$ 在一定程度上有更强的分辨能力.

公式 $M_2(A_1, A_2)$ 不满足条件 S5 的必要性. 事实上，对满足 $u_{A_1}(x_k) > 1 - v_{A_2}(x_k)$, 或 $u_{A_2}(x_k) > 1 - v_{A_1}(x_k)$ 的直觉模糊集

$$A_1 = \{(u_{A_1}(x_k), v_{A_1}(x_k))|x_k \in X\}, \quad A_2 = \{(u_{A_2}(x_k), v_{A_2}(x_k))|x_k \in X\},$$

都有 $M_1(A_1, A_2) = 0$, 这正是 $M_2(A_1, A_2)$ 的缺陷. 因此在选用此公式时要注意使测量的直觉模糊集满足

$$[u_{A_1}(x_k), u_{A_1}(x_k) + \pi(A_1)] \cap [u_{A_2}(x_k), u_{A_2}(x_k) + \pi(A_2)] \neq \emptyset.$$

5 结束语

本文给出了直觉模糊数比较的可能度公式及性质，在此基础上，给出了直觉模糊集的相似度测量公式，旨在为直觉模糊集的相似度测量提供一种新的思路，但该方法也有一定的缺陷. 目前相似度测量公式都存在不同程度的局限性，因此还有待于对这些方法做进一步地完善，为直觉模糊集在医疗诊断、决策和模式识别等方面的应用提供更好的理论依据.

参　考　文　献

[1] Atanassov K. Fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, **20**(1): 87–96.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, **8**(3): 338–353.

[3] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, **79**: 403–405.

[4] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1993, **23**(2): 610–614.

[5] 刘华文. 多目标模糊决策的 Vague 集方法. 系统工程理论与实践， 2004, **24**(5): 103–109.

[6] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operations based on intuitionistic fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 2006, **35**(4): 417–433.

[7] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径. 系统工程理论与实践， 2007, **27**(11): 62–71.

[8] Chen S M, Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, **67**(2): 163–172.

[9] Hong D H, Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **114**: 103–113.

[10] 李凡，饶勇. 基于 Vague 集的加权多目标模糊决策方法. 计算机科学， 2001, **28**(7): 60–65.

[11] De S K, Biswas R, Roy A R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **117**(2): 209–213.

[12] Mitchell H B. On the Dengfeng-Chuntian similarity measure and its application to pattern recognition. *Pattern Recognition letters*, 2003, **24**: 3101–3104.

[13] Li D F, Chuntian C. New similarity measure of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions. *Pattern Recognition Letter*, 2002, **23**: 221–225.

[14] Chen S M. Measures of similarity between vague sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, **74**(2): 217–223.

[15] 李凡，徐章艳． Vague 集之间的相似度量．软件学报， 2001, **12**(6): 922–926.

[16] 赵亚娟，王鸿绪．关于 Vague 集间相似度量的缺陷及修补．计算机工程与应用， 2007, **43**(5): 49–51.

[17] Li Y H, David L Olson and Qin Z. Similarity measures between intuitionistic fuzzy(vague) sets: A comparative analysis. *Pattern Recognition letters*, 2007, **28**: 278–285.

[18] Hong D H, Kim C. A note on similarity measures between vague sets and between elements. *Information Science*, 1999, **115**: 83–96.

[19] Hung W L, Yang M S. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance. *Pattern Recognition Letters*, 2004, **25**: 1603–1611.

[20] Mitchell H B. Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, 2003, **24**: 2687–2693.

[21] Wang Y M, Yang J B and Xu D L. Interval weight generation approaches based an consistency test and interval comparison matrices. *Applied Mathematics and Comparision*, 2005, **167**: 252–273.

[22] 徐泽水，达庆利．区间数排序的可能度法及其应用．系统工程学报， 2003, **18**(1): 67–70.

[23] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **114**(3): 505–518.

A METHOD TO MEASURE THE SIMILARITY DEGREE OF INTUITIONISTIC FUZZY SETS BASED ON THE POSSIBILITY DEGREE

WEI Cuiping

(*College of Operations and Management, Qufu Normal University, Rizhao* 276826)

TANG Xijin

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract The method of measuring the similarity degree between two intuitionistic fuzzy sets is studied. A possibility degree formula for the comparison between two intuitionistic fuzzy numbers is defined, and some properties of the formula is given. On the basis of the possibility degree formula, a new similarity measure for intutionistic fuzzy sets is presented, and then, the advantages and the disadvantages of the similarity measure formula are analyzed. Finally, it will provide better methods to apply intuitionistic fuzzy sets to decision making, pattern recognition and medical diagnostic reasoning.

Key words Intuitionistic fuzzy set, possibility degree formula, similarity measure.